# Épreuve : MATHÉMATIQUES II

Filière PC

Tout le problème se passe dans $E_3$, espace affine euclidien de dimension 3. Le choix, fait une fois pour toutes, d'une origine $O$ permet d'identifier le point $A$ et le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (à partir de la partie II) et l'écriture

$$A = tB + (1-t)C$$

correspond donc à

$$\overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}.$$

Dans tout le problème, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. On appelle courbes polynomiales de degré $n$ les courbes qui admettent une représentation du type :

$$t \mapsto M(t) = A_0 + tA_1 + t^2A_2 + \ldots + t^nA_n.$$

L'objectif du problème est d'étudier un procédé de génération de ces courbes à partir d'une ligne polygonale appelée polygone de contrôle (courbes de Bézier). Ce procédé est très utilisé en informatique graphique, l'opérateur choisissant le polygone de contrôle et l'ordinateur calculant la courbe.

## *Partie I -*

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.

On note $B_n^k$ les polynômes définis par :

$$B_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

$B_n^k = 0$ si $k \geq n+1$ et, par convention, si $k < 0$.

**I.A -** Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) = 1$$

et que, pour tout $k$ $(k = 0, 1\ldots, n)$ on a :

$$B_n^k(x) = (1-x)B_{n-1}^k(x) + xB_{n-1}^{k-1}(x)$$

**I.B -** Soit $i$ un entier $(0 \leq i \leq n)$. Montrer que

$$C_n^i x^i = \sum_{k=i}^{n} C_k^i B_n^k.$$

**I.C -** Montrer que les polynômes $B_n^k$ $(k = 0, 1\ldots n)$ forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

**I.D -** Établir la formule

$$\frac{d}{dx}B_n^k(x) = n(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)) \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

et en déduire la décomposition du polynôme $\int_0^x B_n^i(t)dt$ sur la base formée par les polynômes $B_{n+1}^k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

## *Partie II -*

On rappelle que les paraboles sont les courbes dont une représentation paramétrique est :

$$t \mapsto M(t) = A + t\vec{V} + t^2\vec{W}$$

où $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont deux vecteurs indépendants.

L'axe d'une telle parabole $\mathcal{P}$ admet $\vec{W}$ comme vecteur directeur et passe par le sommet $S$ de $\mathcal{P}$ caractérisé par la propriété suivante : la tangente en $S$ à $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à $\vec{W}$.

**II.A -** Soient trois points $A_0, A_1, A_2$ distincts. On définit $B_0$ barycentre des points $A_0$ et $A_1$ affectés des coefficients $(1-t)$ et $t$ : $B_0 = (1-t)A_0 + tA_1$.

De même on définit :

$B_1$ barycentre de $A_1$ et $A_2$ affectés des coefficients $(1-t)$ et $t$

$C_0$ barycentre de $B_0$ et $B_1$ affectés des coefficients $(1-t)$ et $t$.

Exprimer $C_0(t)$ au moyen des polynômes $B_2^k(t)$ $(k = 0, 1, 2)$ et des points $A_0$, $A_1$, $A_2$ et montrer que la courbe décrite par le point $C_0(t)$ est une parabole $\mathcal{P}$ si et seulement si les points $A_0, A_1, A_2$ ne sont pas alignés. Montrer que toute parabole peut être générée par un tel procédé.

**II.B -** Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ passe par les points $A_0$ et $A_2$. Quels sont les vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en $A_0$ et $A_2$ ? Reconnaître la tangente au point $C_0(t)$.

MA Sujets 99-Bon à tirer:PC Math II 16.10.97-2 version du 13 avril 1999 15:00

*Exemple* : L'espace étant muni d'un repère orthonormé, d'origine $O$, représenter soigneusement sur une même figure les paraboles obtenues dans les trois cas suivants :

$A_0(1, 0, 0), A_1(0, 2, 0), A_2(3, 0, 0)$

$A_0(1, 0, 0), A_1(1, 1, 0), A_2(3, 0, 0)$

$A_0(1, 0, 0), A_1(4, 2, 0), A_2(3, 0, 0)$

On ne tracera que les arcs des paraboles compris entre $A_0$ et $A_2$.

Ceci justifie la notion de polygone de contrôle : en modifiant le polygone, l'opérateur contrôle la forme de la courbe tracée par l'ordinateur.

Nous utilisons maintenant cette représentation pour obtenir quelques propriétés des paraboles.

**II.C -** Que peut-on dire des rapports

$$\frac{\overline{A_0B_0}}{\overline{B_0A_1}}, \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1A_2}}, \frac{\overline{B_0C_0}}{\overline{C_0B_1}} ?$$

**II.D -** On appelle $A_1'$ le milieu de $[A_0A_2]$ et $C$ le point $C_0\left(\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que les points $A_1, A_1', C$ sont alignés.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{C_0(t)C_0(1-t)}$ et $\overrightarrow{A_0A_2}$ sont colinéaires et que le milieu de $[C_0(t)C_0(1-t)]$ appartient à la droite $(A_1A_1')$. Quel est le lieu du milieu des cordes parallèles à $(A_0A_2)$ ?

**II.E -** Soit $B_0'$ le milieu de $[A_0C_0]$. Montrer que les droites $(B_0B_0')$ et $(A_1A_1')$ sont parallèles.

*Application :* L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, les points $A_0, A_1, A_2$ ont pour coordonnées : $A_0(1, 0, 0), A_1(0, 1, 0), A_2(0, 0, 2)$. Trouver les coordonnées du sommet de la parabole de polygone de contrôle $[A_0A_1A_2]$.

**II.F -** Les points $A_0, A_1, A_2$ étant non alignés, on considère les paraboles $\mathcal{P}_1$, définie par le polygone $[A_0A_1A_2]$, de point courant $M(t)$, et $\mathcal{P}_2$, définie par le polygone $[A_1A_2A_0]$ de point courant $N(u)$, paramétrées par le procédé décrit en II.A. Montrer qu'il existe deux valeurs du couple $(t, u)$ pour lesquelles $M(t) = N(u)$ et que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ se coupent sur la médiane issue de $A_0$ dans le triangle $[A_0A_1A_2]$.

## *Partie III -*

**III.A -** On considère une suite de $(n+1)$ points distincts $A_0, A_1, \ldots, A_n$, et on pose $A_i^0 = A_i$ pour $0 \le i \le n$ (les $A_i^0$ pouvant être considérées comme des fonctions constantes).

Pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on construit de proche en proche les suites finies de fonctions $(A_i^k)_{0 \le i \le n-k}$ données par :

$\forall t \in [0, 1], A_i^k(t) = (1-t)A_i^{k-1}(t) + tA_{i+1}^{k-1}(t)$ (algorithme de De Casteljau).

Montrer que

$$A_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} A_j B_n^j(t)$$

et que la courbe $C$ (courbe de Bézier de polygone de contrôle $[A_0A_1\ldots A_n]$) définie par $t \mapsto A_0^n(t)$) passe par les points $A_0$ et $A_n$.

**III.B -** Exprimer la dérivée première (respectivement seconde) de $A_0^n(t)$ au moyen des vecteurs $\Delta_i = A_{i+1} - A_i$ (respectivement $\Delta_i^2 = A_{i+2} - 2A_{i+1} + A_i$). Que trouverait-on pour la dérivée troisième ? Que sont les vecteurs tangents en $A_0$ et $A_n$ ?

**III.C -** Montrer que si les points $(A_i)_{0 \le i \le n}$ sont alignés, alors $C$ est portée par une droite. Réciproque ? Montrer que si les points $A_i$ sont coplanaires, alors la courbe est plane. Réciproque ?

**III.D -** Soit $A_0, A_1, A_2, A_3$ quatre points distincts.

III.D.1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe de Bézier soit une parabole.

III.D.2) On suppose que les quatre points ne sont pas coplanaires. La courbe obtenue peut-elle avoir des points singuliers ?

## *Partie IV -*

Dans cette partie, on appelle courbe de Bézier de polygone de contrôle $[A_0A_1A_2\ldots A_n]$ l'application :

$$t \in [0,1] \mapsto M(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k B_n^k(t)$$ (on se limite à l'arc d'extrémités $A_0$ et $A_n$).

Soit $k$ un entier strictement positif et $kn+1$ points notés $A_0, A_1, \ldots, A_{kn}$.

On considère les courbes de Bézier :

$\Gamma_1$ de polygone $[A_0A_1\ldots A_n]$ de point courant $M_1(t)$

$\Gamma_2$ de polygone $[A_nA_{n+1}\ldots A_{2n}]$ de point courant $M_2(t)$

$\Gamma_k$ de polygone $[A_{(k-1)n}A_{(k-1)n+1}\ldots A_{kn}]$ de point courant $M_k(t)$ .

Soit $\Gamma$ la courbe, réunion des courbes $\Gamma_i$, paramétrée par :

$$u \in [0,1] \mapsto M(u) = M_i(ku - i + 1) \text{ pour } u \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right].$$

**IV.A -** Montrer que pour que la courbe $\Gamma$ soit de classe $C^1$ il faut et il suffit que $A_{ni}$ soit le milieu de $[A_{ni-1}A_{ni+1}]$ $(1 \le i \le k-1)$.

**IV.B -** Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (portant sur les points $A_j$) pour que la courbe soit de classe $C^2$ est :

$$2\overrightarrow{A_{ni-1}A_{ni+1}} = \overrightarrow{A_{ni-2}A_{ni+2}} \ (1 \le i \le k-1) \text{ et } A_{ni} \text{ milieu de } [A_{ni-1}A_{ni+1}].$$

**IV.C -** Soit $A_0, A_n, A_{2n}, \ldots, A_{kn}$ une suite de points distincts et une suite de courbes de Bézier $\Gamma_i (1 \le i \le k)$ d'origine $A_{n(i-1)}$ d'extrémité $A_{ni}$. Soit $\Gamma$ la courbe réunion des $\Gamma_i$, paramétrée comme précédemment.

IV.C.1) On suppose ici que $n = 2$ et on donne un vecteur $\overrightarrow{V_1}$. Montrer qu'il existe une et une seule courbe $\Gamma$, de degré 2 au plus, qui soit de classe $C^1$ et dont le vecteur dérivé en $A_0$ soit $\overrightarrow{V_1}$.

IV.C.2) On suppose ici que $n = 3$ et on donne deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$. Montrer qu'il existe une et une seule courbe $\Gamma$, de degré 3 au plus, qui soit de classe $C^2$ et dont les vecteurs dérivés première et seconde au point $A_0$ soient respectivement $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$.

**IV.D -** On se limite maintenant à trois points distincts $A_0, A_3, A_6$.

IV.D.1) Soit $\overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{V_2}$ deux vecteurs. Montrer qu'il existe une seule courbe $\Gamma$ de degré 3 au plus qui soit de classe $C^2$ et qui admette $\overrightarrow{V_0}$ et $\overrightarrow{V_2}$ comme vecteurs dérivés aux points $A_0$ et $A_6$.

IV.D.2) Montrer qu'il existe une seule courbe $\Gamma$ de degré 3 au plus qui soit de classe $C^2$ et dont les vecteurs dérivés secondes soient nuls en $A_0$ et $A_6$.

**IV.E -** On donne quatre points distincts $A_0, A_3, A_6, A_9$.

IV.E.1) Montrer qu'il existe une seule courbe $\Gamma$ de degré 3 au plus, de classe $C^2$ et dont les vecteurs dérivés secondes soient nuls en $A_0$ et $A_9$. Soit $u \in [0,1] \mapsto M(u)$ sa représentation paramétrique.

IV.E.2) Soit $C$ une courbe quelconque de classe $C^2$ définie par :

$$u \in [0,1] \mapsto N(u), \text{ vérifiant } N(0) = A_0, N\left(\frac{1}{3}\right) = A_3, N\left(\frac{2}{3}\right) = A_6, N(1) = A_9.$$

On propose de démontrer que le minimum de l'intégrale $\int_0^1 \|N''(u)\|^2 du$ est atteint par la courbe $\Gamma$, définie au IV.E.1. Montrer que :

$$\int_0^1 \|N''\|^2 du = \int_0^1 \|M''\|^2 du + \int_0^1 \|N'' - M''\|^2 du + 2\int_0^1 (M'' | N'' - M'')\, du$$

Conclure en intégrant par parties la dernière de ces intégrales.

*Le petit coin de la culture* : Au début des années 60, P. Bézier et P. De Casteljau, alors ingénieurs chez Renault et Citroën, développèrent, indépendamment l'un de l'autre, ces procédés de génération de courbes et de surfaces pour obtenir une méthode de numérisation des formes des pièces utilisées dans l'industrie automobile. Depuis, cela n'a cessé de se développer...

**••• FIN •••**

MA Sujets 99/Bon à tirer/PC Math II 16.10.97-2 version du 13 avril 1999 15:00